

# Ecuación paramétrica

En matemáticas, una **ecuación paramétrica** permite representar una o varias curvas o superficies en el plano o en el espacio, mediante valores arbitrarios o mediante una constante, llamada **parámetro**, en lugar de mediante una variable independiente de cuyos valores se desprenden los de la variable dependiente. Un ejemplo simple de la cinemática, es cuando se usa un parámetro de tiempo para determinar la posición y la velocidad de un móvil.

## Descripción

En el uso estándar del sistema de coordenadas, una o dos variables (dependiendo de si se utilizan dos o tres dimensiones respectivamente) son consideradas como variables independientes, mientras que la restante es la variable dependiente, con el valor de ésta siendo equivalente al de la imagen de la función cuando los restantes valores son sus parámetros. Así por ejemplo la expresión de un punto cualquiera  $(x, y)$  equivale a la expresión  $(x, f(x))$ .

Esta representación tiene la limitación de requerir que la curva sea una función de  $x$  en  $y$ , es decir que todos los valores  $x$  tengan un valor  $y$  sólo un valor correspondiente en  $y$ . No todas las curvas cumplen con dicha condición. Para poder trabajar con la misma como si se tratara de una función, lo que se hace es elegir un dominio y una imagen diferentes, en donde la misma sí sea función. Para hacer esto, tanto  $x$  como  $y$  son considerados variables dependientes, cuyo resultado surge de una tercera variable (sin representación gráfica) conocida como «parámetro».

## Ejemplo

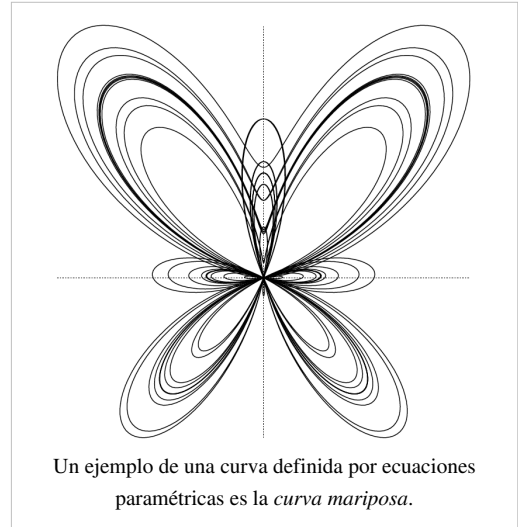
Sea  $3x - 2y - 5 = 0$  la ecuación general de una recta, entonces caben la ecuaciones paramétricas:  $x = 2t + 5$ ,  $y = 3t + 5$ .<sup>[1]</sup>

## Ejemplo

Dada la ecuación  $y = x^2$ , una parametrización tendrá la forma 
$$\begin{cases} x = u(t) \\ y = v(t) \end{cases}$$

Una parametrización posible sería 
$$\begin{cases} x = t \\ y = t^2 \end{cases}$$

Se debe destacar que para cada curva existen infinitas parametrizaciones posibles. Una en donde  $x$  e  $y$  equivaliesen a  $2U$  y  $4U^2$  sería igualmente válida. La diferencia sería que, para encontrar un punto determinado  $(a, b)$  de la curva, el valor del parámetro sería diferente en cada caso. Con el ejemplo dado, el punto  $(2, 4)$  de la curva aparecería en la primera parametrización cuando  $t = 2$ , y en el segundo cuando  $U = 1$ .



## Curvas notables

### Circunferencia

Una circunferencia con centro en el origen de coordenadas y radio  $r$  verifica que  $x^2 + y^2 = r^2$

Una expresión paramétrica es 
$$\begin{cases} x = r \cos t \\ y = r \sin t \end{cases}$$

### Elipse

Una elipse con centro en el origen de coordenadas y que se interseque con el eje  $x$  en  $a$  y  $-a$ , y con el eje  $y$  en  $b$  y  $-b$ , verifica que  $\frac{X^2}{a^2} + \frac{Y^2}{b^2} = 1$ .

Una expresión paramétrica es 
$$\begin{cases} x = a \cos t \\ y = b \sin t \end{cases}$$

### Otras curvas

La expresión paramétrica de una función permite la construcción de una gran variedad de formas, simplemente variando alguna constante. A continuación se describe la función paramétrica:

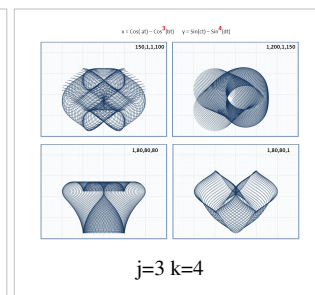
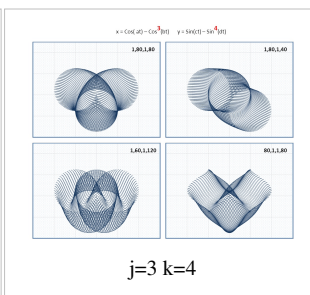
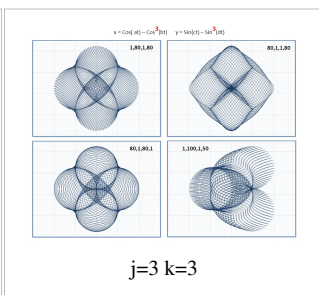
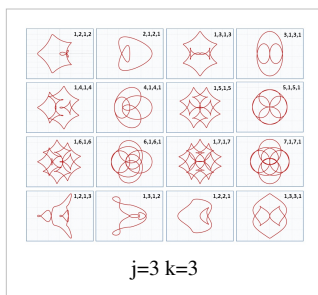
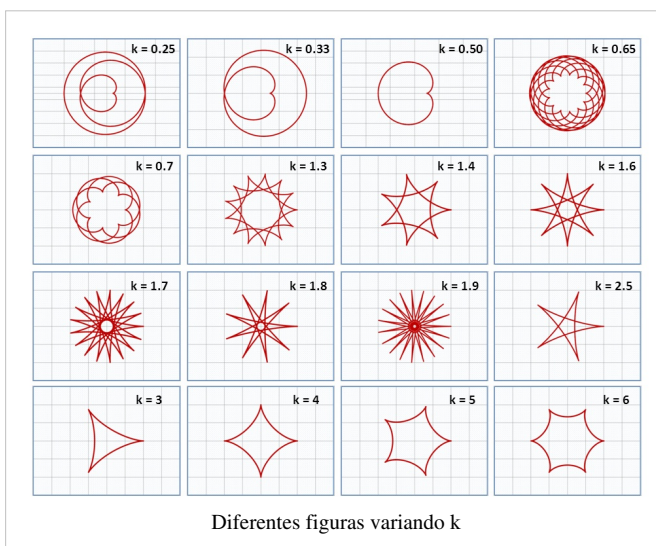
$$\begin{aligned} x &= (a - b) \cos(t) + b \cos(t((a/b) - 1)) \\ y &= (a - b) \sin(t) - b \sin(t((a/b) - 1)) \end{aligned}$$

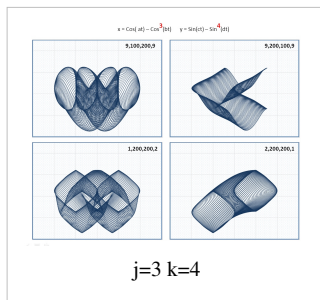
Dependiendo del ratio  $k = a/b$  pueden obtenerse formas muy diversas.

En esta otra función se puede ver una gran variedad de formas en función de los exponentes  $j$  y  $k$ , variando los parámetros  $a, b, c$  y  $d$ .

$$\begin{aligned} x &= \cos(at) - \cos(bt)^j \\ y &= \sin(ct) - \sin(dt)^k \end{aligned}$$

A continuación ejemplos para  $j=3$   $k=3$  y  $j=3$   $k=4$ .

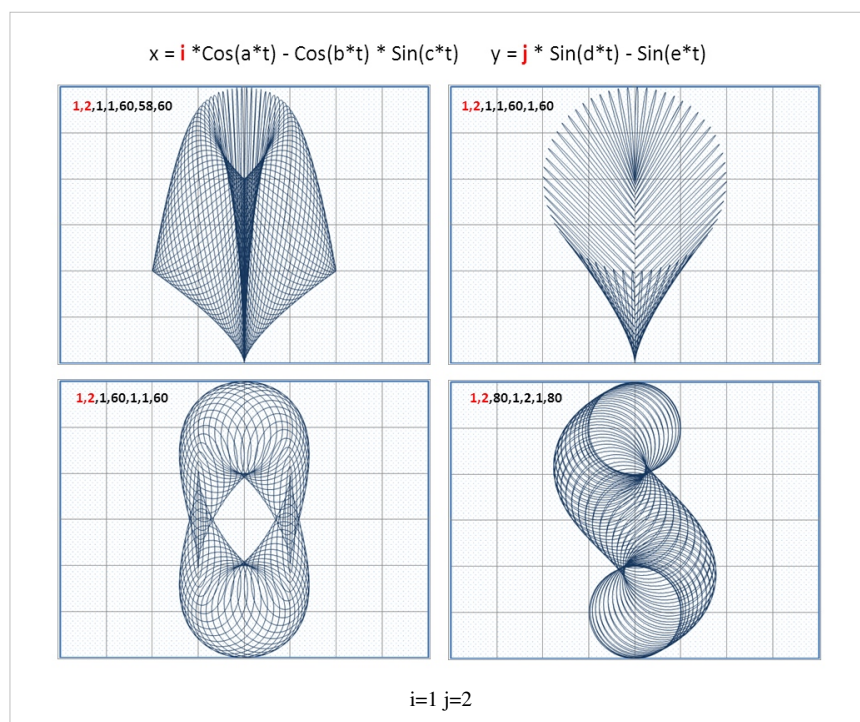




A continuación se describe otra función donde puede obtenerse una gran diversidad de formas, variando el valor de las constantes:  $i, j, a, b, c, d, e$ .

$$x = i \cos(at) - \cos(bt) \sin(ct)$$

$$y = j \sin(dt) - \sin(et)$$



## Representación paramétrica de una curva

La representación paramétrica de una curva en un espacio  $n$ -dimensional consiste en  $n$  funciones de una variable  $t$  que en este caso es la variable independiente o *parámetro* (habitualmente se considera que  $t$  es un número real y que los puntos del espacio  $n$ -dimensional están representados por  $n$  coordenadas reales), de la forma  $e_i = f_i(t)$ ,  $f_i : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ , donde  $e_i$  representa la  $i$ -ésima coordenada del punto generado al asignar valores del intervalo  $[a, b]$  a  $t$ . Por ejemplo, para representar una curva en el espacio se usan 3 funciones  $x = x(t)$ ,  $y = y(t)$ ,  $z = z(t)$

Es común que se exija que el intervalo  $[a, b]$  sea tal que a cada punto  $a \leq t < b$  le corresponda un punto distinto de la curva; si las coordenadas del punto obtenido al hacer  $t = a$  son las mismas del punto correspondiente a  $t = b$  la curva se denomina *cerrada*.

Se dice que un punto de la curva correspondiente a un valor  $t$  del intervalo es un *punto ordinario* si las derivadas de las funciones paramétricas existen en y son continuas en ese punto y al menos una es distinta de 0. Si un arco de curva está compuesto solamente de puntos ordinarios se denomina *suave*.

Es común resumir las ecuaciones paramétricas de una curva en una sola ecuación vectorial

$$\vec{r}(t) = \sum_{i=1}^n f_i(t)\hat{e}_i = f_1(t)\hat{e}_1 + f_2(t)\hat{e}_2 + \dots + f_n(t)\hat{e}_n,$$

donde  $\hat{e}_i$  representa al vector unitario correspondiente a la coordenada  $i$ -ésima. Por ejemplo, las funciones paramétricas de un círculo unitario con centro en el origen son  $x = \cos t$ ,  $y = \sin t$ . Podemos reunir estas ecuaciones como una sola ecuación de la forma

$$\vec{r}(t) = \cos(t)\hat{i} + \sin(t)\hat{j}.$$

## Notas y referencias

[1] "Geometría Analítica" de Gordon Fuller (1991) pág. 223

## Enlaces externos

- Cómo parametrizar una línea (<http://www.math.umn.edu/~nykamp/m2374/readings/lineparam/>) (en inglés - gráficos interactivos)
- La ecuación de la curva mariposa en Wikipedia (en inglés)
- Aplicación web para dibujar curvas parametrizadas en el plano (<http://danher6.100webspaces.net/curvas/?es>)

# Fuentes y contribuyentes del artículo

**Ecuación paramétrica** *Fuente:* <http://es.wikipedia.org/w/index.php?oldid=65549368> *Contribuyentes:* Acratta, AldanaN, Alejop, Arcibel, Cansado, Charly genio, Cheveri, Chzelada, Daniel ht, Diegusjaimes, Digigalos, Ezarate, Farisori, Ggenellina, Götz, Hingelstein, Humbefa, Jkbw, Josep m battle2, Juan Mayordomo, Julian Grillo, Logarithmika Magus, Netito777, Oswaldo Weber, Raulshc, Sabbut, Savh, Technopat, Usuwiki, 36 ediciones anónimas

## Fuentes de imagen, Licencias y contribuyentes

**Archivo:Butterfly trans01.png** *Fuente:* [http://es.wikipedia.org/w/index.php?title=Archivo:Butterfly\\_trans01.png](http://es.wikipedia.org/w/index.php?title=Archivo:Butterfly_trans01.png) *Licencia:* Public Domain *Contribuyentes:* Doctormatt, Krishnavedala, 1 ediciones anónimas

**File:Param 02.jpg** *Fuente:* [http://es.wikipedia.org/w/index.php?title=Archivo:Param\\_02.jpg](http://es.wikipedia.org/w/index.php?title=Archivo:Param_02.jpg) *Licencia:* Creative Commons Attribution-Sharealike 3.0 *Contribuyentes:* User:Josep m battle2

**Imagen:Param 03.jpg** *Fuente:* [http://es.wikipedia.org/w/index.php?title=Archivo:Param\\_03.jpg](http://es.wikipedia.org/w/index.php?title=Archivo:Param_03.jpg) *Licencia:* Creative Commons Attribution-Sharealike 3.0 *Contribuyentes:* User:Josep m battle2

**Imagen:Param33 1.jpg** *Fuente:* [http://es.wikipedia.org/w/index.php?title=Archivo:Param33\\_1.jpg](http://es.wikipedia.org/w/index.php?title=Archivo:Param33_1.jpg) *Licencia:* Creative Commons Attribution-Sharealike 3.0 *Contribuyentes:* User:Josep m battle2

**Imagen:Param34 1.jpg** *Fuente:* [http://es.wikipedia.org/w/index.php?title=Archivo:Param34\\_1.jpg](http://es.wikipedia.org/w/index.php?title=Archivo:Param34_1.jpg) *Licencia:* Creative Commons Attribution-Sharealike 3.0 *Contribuyentes:* User:Josep m battle2

**Imagen:Param34 2.jpg** *Fuente:* [http://es.wikipedia.org/w/index.php?title=Archivo:Param34\\_2.jpg](http://es.wikipedia.org/w/index.php?title=Archivo:Param34_2.jpg) *Licencia:* Creative Commons Attribution-Sharealike 3.0 *Contribuyentes:* User:Josep m battle2

**Imagen:Param34 3.jpg** *Fuente:* [http://es.wikipedia.org/w/index.php?title=Archivo:Param34\\_3.jpg](http://es.wikipedia.org/w/index.php?title=Archivo:Param34_3.jpg) *Licencia:* Creative Commons Attribution-Sharealike 3.0 *Contribuyentes:* User:Josep m battle2

**Imagen:Param st 01.jpg** *Fuente:* [http://es.wikipedia.org/w/index.php?title=Archivo:Param\\_st\\_01.jpg](http://es.wikipedia.org/w/index.php?title=Archivo:Param_st_01.jpg) *Licencia:* Creative Commons Attribution-Sharealike 3.0 *Contribuyentes:* User:Josep m battle2

## Licencia

---

Creative Commons Attribution-Share Alike 3.0 Unported  
[//creativecommons.org/licenses/by-sa/3.0/](http://creativecommons.org/licenses/by-sa/3.0/)